

独当一面

1. 2017年浙江温州中考真题第8题4分 ★★★

我们知道方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的解是 $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, 现给出另一个方程

$(2x + 3)^2 + 2(2x + 3) - 3 = 0$, 它的解是 () .

A. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

B. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

C. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

D. $x_1 = -1$, $x_2 = -3$

【答案】 D

【解析】 设 $2x + 3 = y$.

则原方式可化为 $y^2 + 2y - 3 = 0$.

$\because$ 方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 有两个解 $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

$\therefore y_1 = 1$, $y_2 = -3$.

则 $2x + 3 = 1$ 或 $2x + 3 = -3$.

解得 $x = -1$ 或 $x = -3$.

【标注】 【知识点】 换元法求一元二次方程的根

2. 2017年贵州六盘水中考真题第12题4分 ★★★

三角形的两边 a 、 b 的夹角为 60° 且满足方程 $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$, 则第三边的长是 () .

A. $\sqrt{6}$

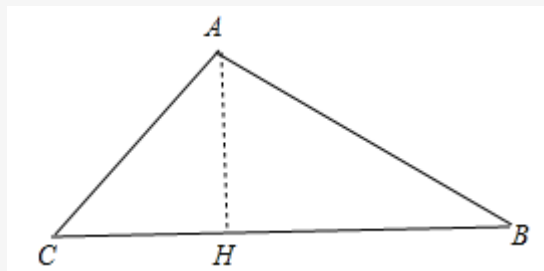
B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】 A

【解析】 $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$,



$$(x - 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0,$$

所以 $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$,

即 $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$,

如图, $\triangle ABC$ 中, $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $\angle C = 60^\circ$,

作 $AH \perp BC$ 于 H ,

在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, $\because \angle C = 60^\circ$,

$$\therefore CH = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}, AH = \sqrt{3}CH = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore BH = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABH \text{中}, AB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{6},$$

即三角形的第三边的长是 $\sqrt{6}$.

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

【能力】推理论证能力

3. 2017年湖北咸宁初三中考二模第5题 ★★

已知 a 、 b 、 c 为常数，点 $P(a, c)$ 在第二象限，则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的情况是 () .

- A. 有两个相等的实数根
- B. 有两个不相等的实数根
- C. 没有实数根
- D. 无法判断

【答案】 B

【解析】 $\because$ 点 $P(a, c)$ 在第二象限，

$$\therefore a < 0, c > 0,$$

$$\therefore ac < 0,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根 .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

4. 2013~2014学年陕西西安碑林区西北工业大学附属中学初三上学期期中第9题3分 ★★

关于 x 的方程 $x^2 + 2kx + 2k - 1 = 0$ 的根的情况描述正确的是 () .

- A. k 为任何实数，方程都没有实数根
- B. k 为任何实数，方程都有两个不相等的实数根
- C. k 为任何实数，方程都有两个相等的实数根
- D. 根据 k 的取值不同，方程根的情况分为有两个不相等的实数根和有两个相等的实数根两种情况 .

【答案】 D

【解析】 $\Delta = 4k^2 - 4(2k - 1) = 4(k - 1)^2,$

$$\therefore 4(k - 1)^2 \geq 0,$$

$$\text{即 } \Delta \geq 0,$$

∴当 $k = 1$ 时，方程有两个相等的实数根．
当 $k \neq 1$ 时，方程有两个不相等的实数根．
故选：D．

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

5. 2017~2018学年天津和平区天津市益中学校初三上学期单元测试《一元二次方程》第9题3分 ★★★

若 $(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) - 8 = 0$ ，则 $a^2 + b^2$ 的值为 _____ ．

【答案】 4

【解析】把方程 $(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) - 8 = 0$ 看作关于 $a^2 + b^2$ 的一元二次方程

则利用因式分解法可得： $(a^2 + b^2 - 4)(a^2 + b^2 + 2) = 0$

∴ $a^2 + b^2 - 4 = 0$ 或 $a^2 + b^2 + 2 = 0$ ，

∴ $a^2 + b^2 = 4$ 或 $a^2 + b^2 = -2$ ，

∵ $a^2 + b^2 > 0$ ，

∴ $a^2 + b^2 = 4$ ．

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

6. 2017~2018学年天津和平区天津市益中学校初三上学期单元测试《一元二次方程》第11题3分

★★★

(1) 老师先教会 x 名同学一首歌，然后让学会的同学每人教会 x 人，全班 42 名同学恰好都学会，则 $x =$ _____；(2) 一人患了流感，经过两轮传染后共有 36 人患了流感，则每轮传染中平均一个人传染了 _____ 个人．

【答案】 6；5

【解析】(1) 由题意得 $x + x^2 = 42$ ，∴ $x^2 + x - 42 = 0$ ，

∴ $(x - 6)(x + 7) = 0$ ．

解得 $x_1 = 6$ ， $x_2 = -7$ （不合题意舍去）．

故 $x = 6$ ．

(2) 设每轮传染中平均一个人传染 x 人，

由题意得 $(x + 1)^2 = 36$ ，

解得： $x = 5$ ．故每轮传染中平均一个人传染了 5 个人．

故答案为：(1) 6；(2) 5．

【标注】【知识点】一元二次方程的传播问题

7. 2017年湖南岳阳中考真题第14题4分 ★★★

在 $\triangle ABC$ 中 $BC = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = b$, 且关于 x 的方程 $x^2 - 4x + b = 0$ 有两个相等的实数根 , 则 AC 边上的中线长为 _____ .

【答案】 2

【解析】 $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 4x + b = 0$ 有两个相等的实数根 ,

$$\therefore \Delta = 16 - 4b = 0 ,$$

$$\therefore AC = b = 4 ,$$

$$\because BC = 2 , AB = 2\sqrt{3} ,$$

$$\therefore BC^2 + AB^2 = AC^2 ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形 , AC 是斜边 ,

$$\therefore AC \text{ 边上的中线长} = \frac{1}{2} AC = 2 .$$

【标注】 【知识点】 与三角形三边关系结合

8. 2017~2018学年天津和平区天津市益中学校初三上学期单元测试《一元二次方程》第14题20分

★★★

解方程 :

$$(1) \frac{3x^2 + 1}{5} = 2x$$

$$(2) 5(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = -3\sqrt{2}x + 2$$

【答案】 (1) $x_1 = \frac{5 + \sqrt{22}}{3}$, $x_2 = \frac{5 - \sqrt{22}}{3}$.

(2) 原方程无实数根 .

【解析】 (1) $\frac{3x^2 + 1}{5} = 2x$

$$\text{去分母得: } 3x^2 + 1 = 10x$$

$$\text{移项得: } 3x^2 - 10x + 1 = 0 ,$$

$$\because a = 3 , b = -10 , c = 1 ,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 100 - 12 = 88 > 0 ,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{88}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{22}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{22}}{3} ,$$

$$\therefore x_1 = \frac{5 + \sqrt{22}}{3} , x_2 = \frac{5 - \sqrt{22}}{3} .$$

$$(2) 5(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = -3\sqrt{2}x + 2$$

$$\text{去括号得: } 5x^2 - 5\sqrt{2}x + 5 = -3\sqrt{2}x + 2 ,$$

$$\text{移项, 合并同类项得: } 5x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0 ,$$

$$\because a = 5 , b = -2\sqrt{2} , c = 3 ,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2}) - 4 \times 5 \times 3 = 8 - 60 = -52 < 0,$$

$\therefore$ 原方程无实数根.

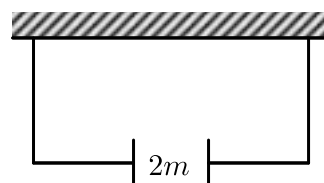
【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

9.

2017~2018学年天津和平区天津市益中学校初三上学期单元测试《一元二次方程一元二次方程》第16题15分

★★★

如图，某农户准备建一个长方形养鸡场，养鸡场的一边靠墙，墙对面有一个2m宽的门，另三边用竹篱笆围成，篱笆总长33m.围成长方形的养鸡场除门之外四周不能有空隙.若墙长为am(a 为常数)，要围成养鸡场的面积为 150m^2 ，则鸡场的长和宽各为多少米？



【答案】当 $0 < a < 15$ 时，不能围成养鸡场；

当 $15 \leq a < 20$ 时，可以围成一个长为15m，宽为7.5m的养鸡场.

当 $a \geq 20$ 时，可以围成一个长为15m，宽为7.5m的养鸡场，或一个长为20m,宽为10m的养鸡场.

【解析】设养鸡场的宽为 $x\text{m}$,

根据题意得： $x(33 - 2x + 2) = 150$,

解得： $x_1 = 10$, $x_2 = 7.5$,

当 $x_1 = 10$ 时，养鸡场的长为： $33 - 2x + 2 = 15\text{m}$,

当 $x_2 = 7.5$ 时，养鸡场的长为： $33 - 2x + 2 = 20\text{m}$ (舍去)，

$\therefore$ 当 $0 < a < 15$ 时，不能围成养鸡场；

当 $15 \leq a < 20$ 时，可以围成一个长为15m，宽为7.5m的养鸡场.

当 $a \geq 20$ 时，可以围成一个长为15m，宽为7.5m的养鸡场，或一个长为20m,宽为10m的养鸡场.

【标注】【知识点】一元二次方程的其他实际问题

10. 2020~2021学年重庆江北区重庆观音桥实验中学初三上学期开学考试第24题10分 ★★★

某地大力发展经济作物，其中果树种植已初具规模，今年受气候、雨水等因素的影响，樱桃较去年有小幅度的减产，而枇杷有所增产.

(1)

该地某果农今年收获樱桃和枇杷共 400 千克，其中枇杷的产量不超过樱桃产量的 7 倍，求该果农今年收获樱桃至少多少千克。

- (2) 该果农把今年收获的樱桃、枇杷两种水果的一部分运往市场销售，该果农去年樱桃的市场销售量为 100 千克，销售均价为 30 元/千克，今年樱桃的市场的售量比去年减少了 $m\%$ ，销售均价与去年相同；该果农去年枇杷的市场销售量为 200 千克，销售均价为 20 元/千克，今年枇杷的市场销售量比去年增加 $2m\%$ ，但销售均价比去年减少了 $m\%$ ，该果农今年运往市场销售的这部分樱桃和枇杷的销售总金额与他去年樱桃和枇杷的市场销售总金额相同，求 m 的值。

【答案】 (1) 50 .

(2) 12.5 .

【解析】 (1) 设该果农今年收获樱桃 x 千克，

根据题意得： $400 - x \leq 7x$ ，

解得： $x \geq 50$ ，

答：该果农今年收获樱桃至少 50 千克。

(2) 由题意可得：

$$100(1 - m\%) \times 30 + 200 \times (1 + 2m\%) \times 20(1 - m\%) = 100 \times 30 + 200 \times 20,$$

令 $m\% = y$ ，

原方程可化为： $3000(1 - y) + 4000(1 + 2y)(1 - y) = 7000$ ，

整理可得： $8y^2 - y = 0$ ，

解得： $y_1 = 0$ ， $y_2 = 0.125$ ，

$\therefore m_1 = 0$ (舍去)， $m_2 = 12.5$ ，

答： m 的值为 12.5。

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题